

Министерство просвещения Российской Федерации ФГБОУ ВО  
«Уральский государственный педагогический университет» Институт  
математики, физики, информатики и технологий  
Кафедра высшей математики и методики обучения математике

# ЗАДАЧИ НА ДОКАЗАТЕЛЬСТВО КАК СРЕДСТВО ФОРМИРОВАНИЯ ПОЗНАВАТЕЛЬНЫХ УНИВЕРСАЛЬНЫХ УЧЕБНЫХ ДЕЙСТВИЙ В ПРОЦЕССЕ ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ

# Выпускная квалификационная работа

Направление «44.03.01 – Педагогическое образование»  
Профиль «Математика»

Работа допущена к защите  
Заведующий кафедрой

Исполнитель:  
Пронина Ксения Сергеевна,  
обучающаяся группы МАТ-1601

дата

ПОДПИСЬ

ПОДПИСЬ

оценка

Научный руководитель:  
Аввакумова Ирина Александровна,  
канд. пед. наук, доцент

ПОДПИСЬ

Екатеринбург 2020

## ВВЕДЕНИЕ

Федеральный государственный образовательный стандарт основного общего образования (ФГОС ООО) устанавливает требования к результатам усвоения обучающимися основной образовательной программы: личностным, метапредметным, предметным. В перечень метапредметных результатов обучения входят универсальные учебные действия: регулятивные, познавательные, коммуникативные. Согласно Федеральному государственному образовательному стандарту универсальные учебные действия должны являться целью обучения и формироваться в процессе освоения обучающимися каждой предметной области с учетом её специфики, в том числе и математики. Математика, в силу своего предметного содержания, имеет все возможности для полноценного формирования познавательных универсальных учебных действий обучающихся. В основе Стандарта лежит системно-деятельностный подход, при котором усвоение содержания обучения и развитие происходят в процессе активной деятельности обучающихся. Результатом этой деятельности является решение задач разного типа, в том числе и задач на доказательство. В процессе обучения доказательству и решения задач на доказательство формируются не только математические знания, умения и навыки, соответствующие предметным результатам обучения, но и развиваются мыслительные способности; формируются умения строить самостоятельный процесс поиска, исследования; построения логической цепочки рассуждений, осуществления доказательства, выдвижения и обоснования гипотез. Указанные умения и являются компонентами познавательных универсальных учебных действий.

Обучение доказательству является одной из наиболее важных проблем методики обучения математике, а также объектом исследований многих

учёных: А. Д. Александрова, В. М. Брадиса, В. А. Далингера, Г. В. Дорофеева, Ю. М. Колягина, В. И. Крупича, Д. Пойа, Г. И. Саранцева и др.

Изучение теорем в школе имеет своей целью не только сообщение школьникам некоторых геометрических результатов, но и методов, с помощью которых эти результаты получаются.

В связи с изменениями в обществе и государственной политике в области образования следует внести некоторые коррективы в процесс обучения доказательствам и деятельность учителя.

Все вышесказанное обуславливает актуальность данной темы.

Объект исследования: процесс обучения математике в общеобразовательной школе.

Предмет исследования: формирование познавательных универсальных учебных действий у обучающихся в процессе обучения решению задач на доказательство.

Цель: разработать конструкции для формулирования заданий, направленных на формирование познавательных универсальных учебных действий в процессе решения задач на доказательство.

Задачи:

1. Проанализировать психолого-педагогическую и методическую литературу, интернет-ресурсы с целью выделения сущности, структуры и пооперационного состава познавательных универсальных учебных действий обучающихся.

2. Выявить сущность понятия «Задача на доказательство».

3. Определить возможности задач на доказательство для формирования познавательных универсальных учебных действий. Установить соответствие между этапами доказательства и операциями формирования познавательных

4. Представить конструкции для формулирования заданий, направленных на формирование познавательных УУД, к элементам этапов решения задач на доказательство.

5. Разработать примеры заданий на основе представленных конструкций, иллюстрирующих формирование познавательных УУД на элементах этапов решения задач на доказательство.

Структура работы: введение; основная часть, состоящая из двух глав; заключение; список источников и литературы, содержащий 46 источников.

Основные результаты исследования представлены в публикации:

# **ГЛАВА 1. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ФОРМИРОВАНИЯ ПОЗНАВАТЕЛЬНЫХ УНИВЕРСАЛЬНЫХ УЧЕБНЫХ ДЕЙСТВИЙ У ОБУЧАЮЩИХСЯ ПРИ РАБОТЕ С ЗАДАЧАМИ НА ДОКАЗАТЕЛЬСТВО**

## **1.1. Определение и структура познавательных универсальных учебных действий**

Современное общество предъявляет к людям множество новых требований, одно из которых – повышенная мобильность и способность к непрерывному образованию для ориентирования в увеличивающемся потоке информации и умения выполнять операции с ней. В связи с этим особую значимость приобретает готовность обучающихся к поиску, анализу и переработке информации, способность к переносу сформированных умений в условия жизненных ситуаций. Федеральный государственный образовательный стандарт основного общего образования (ФГОС ООО) обеспечивает достижение требований общества путем формирования у обучающихся универсальных учебных действий (УУД), в том числе познавательных универсальных учебных действий (ПУУД).

Существуют различные подходы к определению понятия «познавательные универсальные учебные действия». Выделим некоторые из них.

Т. Ю. Серeda под познавательными универсальными действиями понимают такие, которые обеспечивают познание – умственный творческий процесс получения и постоянного обновления знаний, необходимых человеку [37].

В статье [10] познавательные универсальные учебные действия определены как система способов познания окружающего мира, построение самостоятельного процесса поиска, исследования и совокупность операций

по переработке, систематизации, обобщению и использованию полученной информации.

Н.А. Чуланова и Т.Н. Черняева под познавательными универсальными учебными действиями понимают умственные действия, направленные на планирование, осуществление, анализ своей познавательной деятельности и управление ею на основе способов деятельности, используемых как в рамках образовательного процесса, так и при решении проблем в реальных жизненных ситуациях, освоенных обучающимися на базе одного, нескольких или всех учебных предметов [43].

Согласно А.Г. Асмолову познавательные универсальные учебные действия – это умения результативно мыслить и работать с информацией в современном мире. Они обеспечивают способность к познанию окружающего мира: готовность осуществлять направленный поиск, обработку и использование информации [3].

А. В. Онучина понимает познавательные учебные действия как действия самостоятельного прогнозирования учебных целей, которые создают условия для развития логического и проектного мышления [28].

Анализ данных определений показывает, что основными признаками ПУУД является «процесс познания», «поиск информации», «использование и обработка информации», «планирование и прогнозирование своей познавательной деятельности». Основываясь на данных признаках, можно определить познавательные универсальные учебные действия как действия, обеспечивающие познание, включающее в себя поиск необходимой информации, работу с полученной информацией, обработку информации и ее использование, как в рамках образовательного процесса, так и в жизненных ситуациях с целью прогнозирования своей познавательной деятельности.

Авторы, занимающиеся проблемой формирования познавательных универсальных учебных действий, включают в их структуру различные компоненты. Анализ литературы [3, 13, 25, 26] показал, что структуры действий, выделенные этими авторами, имеют сходную характеристику и

основываются на структуре, выделенной А.Г. Асмоловым, согласно которой блок познавательных универсальных учебных действий содержит общеучебные действия, включая знаково-символические; логические действия, а также действия постановки и решения проблем [3].

Функцией общеучебных действий является управление познавательными процессами. К ним относятся [3]:

- исследовательские (самостоятельное выделение и формулирование познавательной цели, гипотез и их проверка);
- информационные (поиск и выделение необходимой информации, в том числе с помощью компьютерных средств, обработка, хранение, защита и использование информации);
- знаково-символические действия (замещение, создание и преобразование модели с целью выявления общих законов, определяющих данную предметную область, использование модели для решения задач);
- умение структурировать знания;
- умение осознанно и произвольно строить речевое высказывание в устной и письменной форме;
- выбор наиболее эффективных способов решения задач в зависимости от конкретных условий;
- познавательная и личностная рефлексия, контроль и оценка процесса и результатов деятельности;
- смысловое чтение на основе осознания цели чтения и выбора вида чтения в зависимости от цели, извлечение необходимой информации из прослушанных текстов различных жанров, определение основной и второстепенной информации; умение адекватно, подробно, сжато, выборочно передавать содержание текста.

Функция логических действий состоит в обеспечении инструментальной основы мышления и решения проблем, в том числе исследовательских. К ним относятся [3]:

- анализ объектов с целью выделения признаков (существенных, несущественных);

- синтез как составление целого из частей, в том числе с самостоятельным достраиванием, восполнением недостающих компонентов;

- выбор оснований и критериев для сравнения, сериации, классификации объектов;

- подведение под понятия, выведение следствий;

- установление причинно-следственных связей, построение логической цепи рассуждений;

- выдвижение гипотез, их обоснование и доказательство.

Действия постановки и решения проблем выполняют функцию исследования проблемной области с выделением цели как образа потребного будущего, стратегии и тактики ее достижения. Исследовательские действия включают: формулирование проблемы и самостоятельное создание способов решения проблем творческого и поискового характера [3].

В ФГОС и примерной основной образовательной программе основного общего образования ПУУД сформулированы на достаточно обобщенном языке. Для их целенаправленного формирования необходимо конкретизировать пооперационный состав этих действий. Не претендуя на полноту, представим конкретный состав рассматриваемых действий.

#### **Общеучебные познавательные универсальные действия (ОПУД):**

- поиск и выделение необходимой информации, в том числе с помощью компьютерных средств, обработка, хранение, защита и использование информации:

- умение определять, какие знания необходимо приобрести для решения учебных, межпредметных задач;

- умение отбирать источники информации (словари, энциклопедии, справочники, СМИ, электронные и интернет-источники), необходимые для решения конкретных заданий;



– умение отбирать и сопоставлять информацию, полученную из различных источников;

- структурирование знаний:

- умение представлять информацию в виде таблиц, графиков, схем, диаграмм;

- умение представлять информацию при помощи своей системы обозначений;

- умение получить информацию из представленного графика, диаграммы, схемы;

- умение достраивать недостающие элементы совокупности;

- умение устанавливать связи между объектами и их частями [9];

- выбор наиболее эффективных способов решения задач в зависимости от конкретных условий:

- умение определять наиболее простой способ решения задачи из представленных в определенных условиях;

- умение определять условия, при которых представленный способ решения задачи будет наиболее простым;

- умение решить задачу несколькими способами [9];

- рефлексия способов и условий действия, контроль и оценка процесса и результатов деятельности:

- умение выделить критерии для оценки результата или процесса;

- умение оценить по заданной системе критериев;

- умение нахождения ошибок в решении [9].

- Знаково-символические действия:**

- умение выделять существенные характеристики объекта (пространственно-графические или знаково-символические);

- умение преобразовать объект из чувственной формы в модель, в которой будут отражены его существенные признаки (создание модели);

- умение кодирования и декодирования информации;

- умение преобразовывать модель с целью выявления общих законов, определяющих данную предметную область;

- умение использовать модели для решения задач.

### **Логические познавательные универсальные действия (ЛПУД):**

- анализ объектов:

- умение разделять объект на части;

- умение располагать части в определенной последовательности;

- умение характеризовать части этого объекта [13];

- синтез:

- умение выделять основание объединения;

- умение объединять элементы по заданному основанию;

- умение преобразовать целое по другому основанию [9];

- выбор оснований и критериев для сравнения, сериации, классификации объектов:

- умение определять основание классификации объектов;

- умение распределять элементы по заданному критерию;

- умение выделять признаки, по которым сравниваются объекты;

- умение выделять признаки сходства/различия;

- умение выделять главное и второстепенное в изучаемом объекте;

- умение выделить признаки объекта по определенному критерию [9];

- подведение под понятие, выведение следствий:

- умение формулировать понятие, под которое подводится исследуемый объект;

- умение выделять существенные признаки данного понятия (ближайшее родовое понятие, видовые отличия), зафиксированные в определении;

- умение устанавливать логические связи между выделенными признаками;

- умение устанавливать наличие у объекта выделенных существенных признаков и связей между ними;

- умение делать вывод о принадлежности объекта данному понятию (всеми ли существенными признаками и связями между ними обладает исследуемый объект);

- умение выделять существенные признаки объекта, принадлежащие данному понятию, т.е. такие, которые являются следствием принадлежности его к данному классу к данному понятию, а также дополнительных свойств объекта [7];

- установление причинно-следственных связей:

- умение определять истинность логических суждений по заданным исходным условиям;

- умение определять исходные условия по заданным логическим суждениям;

- умение определять условия по заданным исходным данным и конечному результату [9];

- умение находить главное в изучаемом явлении или объекте;

- умение устанавливать главную причину явления;

- умение кратко оформлять высказывание, связывающее причину и следствие [13];

- построение логической цепочки рассуждений:

- умение разделять рассуждения на основные компоненты;

- умение устанавливать связи между выделенными компонентами;

- умение располагать компоненты в определенной последовательности;

- доказательство:

- умение составлять цепочки умозаключений (правильных), идущих от верных посылок (исходных для данного доказательства суждений) к доказываемым (заключительным) тезисам;

- умение устанавливать связи между аргументами, ведущими от условия к заключению (использовать методы доказательства);

- выдвижение гипотез и их обоснование:

- умение формулировать вывод/предположение на основе нескольких положений;
- умение определить закон, которому подчиняется данное явление;
- умение разделять гипотезу/предположение на структурные составляющие;
- умение выбирать из нескольких предположений/выводов/гипотез наиболее корректные, в наибольшей степени отражающие заданные посылки;
- умение обосновывать гипотезу, используя известные теоретические факты или наблюдения и эксперименты [28].

#### **Постановка и решение проблемы:**

- формулирование проблемы:
  - умение прогнозировать условия, при которых невозможно решение задачи;
  - умение определять изменения в условиях;
  - умение определять недостаточную для решения задачи информацию [9].

Таким образом, выделенный пооперационный состав ПУУД дает возможность устанавливать соответствие между ними и деятельностью обучающихся, которая направлена на их формирование. Это соответствие позволит сделать вывод о том, целесообразна ли данная деятельность для формирования данного вида ПУУД.

### **1.2. Сущность процесса обучения решению задач на доказательство**

Для достижения поставленной цели необходимо определить сущность понятия задач на доказательство, методы и приёмы для решения данных задач, основные этапы решения задач на доказательство.

Обучение решению задач на доказательство является одной из важнейших целей обучения математике. Именно при выполнении доказательств развивается логическое мышление обучающихся, разрабатываются логические схемы решения задач, возникает потребность обучающихся в обосновании математических фактов.

Д. Пойа [32] определяет задачу на доказательство как задачу, для решения которой требуется установить истинность или ложность некоторого утверждения, подтвердить или опровергнуть его.

Задачи на доказательство имеют своей целью доказать, что определённое чётко сформулированное утверждение верно или же неверно [31].

Особая ценность задач на доказательство заключается в том, что при их решении удачно сочетаются интересы овладения математической теорией и развития умения применять теоретические знания на практике [40].

Процесс решения такой задачи – доказательство – представляет собой последовательность логических операций или шагов, начинающихся с условия и заканчивающихся требованием из формулировки задачи. Каждый шаг приводит к некоторому новому положению, полученному из соответствующим образом подобранных частей условия, уже известных фактов или ранее доказанных положений. Чтобы доказать предложение, нужно обнаружить логическое звено, связывающее его главные части – условие и заключение; чтобы опровергнуть – показать (на контрпримере), что условие не приводит к заключению.

Простейшими задачами, с решения которых практически начинается обучение доказательствам, являются задачи-вопросы и элементарные задачи на исследование. Решение таких задач заключается в отыскании ответа на вопрос и доказательстве его истинности. Задачи-вопросы обычно требуют для своего решения (доказательства истинности ответа) установления одной импликации, одного логического шага от данных к доказываемому. Доказательство же при решении более сложной задачи или доказательство

теоремы представляет собой цепочку шагов-импликаций. Целью решения задач-вопросов является и осознание, уточнение и конкретизация изучаемых понятий и связей между ними. Задачи-вопросы необходимы также для усвоения учащимися вводимой символики и используемого языка. Существенную роль в обучении доказательствам играют упражнения в заполнении пропущенных слов, символов и их сочетаний в тексте готового доказательства [5].

Ю.А. Розка [35], поддерживая позицию Д. Пойа в трактовке понятия «геометрическая задача на доказательство», приводит следующие методы решения задач этого класса:

- восходящий анализ;
- алгебраический анализ;
- нисходящий анализ (несовершенный анализ и метод доказательства от противного);
- математическая индукция.

Рассматривая этапы решения задач на доказательство, выделенные разными исследователями, автор приходит к выводу, что все рассмотренные структуры решения задачи на доказательство соответствуют общепринятому делению процесса решения задачи на четыре этапа:

- 1) осмысление условия задачи;
- 2) составление плана решения;
- 3) осуществление плана;
- 4) изучение найденного решения.

Для успешного обучения доказательствам необходимо, чтобы школьники овладели достаточно полной системой теоретических знаний и умений (понятия и их определения, аксиомы, теоремы, умения выполнять основные построения и др.) [39].

Подготовка к обучению школьников доказательству теорем начинается уже в IV–V классах, где, не употребляя терминов «теорема»,

«доказательство», учащиеся знакомятся с первыми утверждениями и делают первые шаги в выполнении дедуктивных умозаключений. Широкие возможности введения простейших упражнений, в которых пятиклассники учатся дедуктивным рассуждениям, имеются при изучении осевой симметрии, при решении первых задач на построение (построение фигуры, симметричной данной, деление отрезка пополам, построение биссектрисы угла) [39].

Выделим основные направления пропедевтической работы по подготовке учащихся к доказательству теорем.

1. Формировать у учащихся умения подмечать закономерности.
2. Воспитывать у школьников понимание необходимости доказательства.
3. Обучать учащихся умению выделять условие и заключение в математических утверждениях.
4. Знакомить учащихся с простыми и сложными высказываниями и значениями их истинности.
5. Знакомить школьников с понятием отрицания высказываний и с понятием противоречивых высказываний.
6. Обучать учащихся умению выделять различные конфигурации на одном и том же чертеже.
7. Обучать школьников умению пользоваться контрпримерами.
8. Обучать учащихся умению выполнять геометрические чертежи и читать их.
9. Формировать у учащихся умения выводить следствия из заданных условий.
10. Формировать у учащихся умения проводить доказательные рассуждения, делать выводы.

Такая работа нужна не только в качестве пропедевтики обучения школьников доказательствам в систематическом курсе геометрии, но она

играет существенную роль уже при изучении курса математики 5–6 классов [19].

Самое трудное в доказательстве – это найти последовательность разъяснений, применяя которые к условиям теоремы или промежуточным результатам в конечном итоге можно получить нужное следствие – доказываемое положение. При поиске этой последовательности целесообразно руководствоваться некоторыми следующими правилами:

1. Заменять названия объектов, о которых идет речь в теореме, их определениями или признаками. Например, если речь идет о прямоугольнике, то для доказательства используем определение прямоугольника;

2. Доказываемое положение раздробить на части, если это возможно, и доказывать каждую часть в отдельности. Так, например, доказательство теоремы: «Если в четырехугольнике диагонали пересекаются и точкой пересечения делятся пополам, то этот четырехугольник – параллелограмм» можно разделить на две части: сначала доказать, что одна пара противоположных сторон данного четырехугольника параллельна, а затем доказать, что и вторая пара противоположных сторон также параллельна;

3. В поисках доказательства теоремы полезно идти с двух сторон: от условий теоремы к заключению и от заключения к условиям. Учащимся надо объяснить, что, изучая теоремы, нужно не просто запоминать их доказательство, а каждый раз думать и устанавливать, какими методами они доказываются, какими эвристическими правилами руководствовались при нахождении этих доказательств, как догадались (додумались) до этих доказательств, какие известные положения геометрии использовались и с какой целью [1].

Основными направлениями работы по формированию у учащихся умения доказывать могут быть следующие:

1. Показывать учащимся роль и значение доказательства в открытии новых знаний и в усвоении учебного материала курса математики.



2. Разъяснять школьникам, в чем состоит сущность доказательства как процесса утверждения или опровержения истинности мыслей.

3. Проводить целенаправленную работу по обучению учащихся пользоваться индуктивным и дедуктивным методами (формировать умение находить общее в отдельных частных примерах; воспитывать у учащихся критическое отношение к индуктивному заключению; формировать умение отличать индуктивные умозаключения от дедуктивных).

4. Планомерно формировать у учащихся умения выводить логические следствия из посылок, приучать школьников логически верно оформлять свои рассуждения.

5. Формировать у учащихся познавательные действия, необходимые для доказательства и учить их применять в нужных ситуациях.

6. Учить школьников обобщать познавательные действия, которые выполняются в ходе доказательств [19].

Доказательство включает в себя три основных элемента:

1) Тезис (главная цель доказательства – установить истинность тезиса). Форма выражения тезиса – суждение.

2) Аргументы (основания) доказательства – положения, на которые опирается доказательство и из которых при условии их истинности необходимо следует истинность доказываемого тезиса. Форма выражения аргументов – суждение.

3) Демонстрация – логический процесс взаимосвязи суждений, в результате которого осуществляется переход от аргументов к тезису [37].

В демонстрации отражается характер логических связей между тезисом и аргументом. В зависимости от вида демонстрации в методической литературе часто употребляются термины «способ доказательства» и «метод доказательства». Покажем, в чем состоит их отличие [17].

Если доказательство утверждения отличается от другого доказательства того же самого утверждения не логической основой, а последовательностью умозаключений, то будем говорить, что утверждение

доказывается двумя различными способами, если же одно доказательство отличается от другого логической основой, то будем говорить о различных методах доказательства [17].

Различают частные и общие методы доказательства теорем.

Общими методами доказательства теорем в курсе математики средней школы являются: синтетический, аналитический, доказательство противоречием (метод от противного), доказательство методом перебора, доказательство методом исключения, метод бесконечных исключений, метод полной индукции, метод математической индукции, метод конструирования.

Рассмотрим для примера теорему, выражающую один из признаков параллелограмма: «Если в четырёхугольнике противоположные стороны равны, то этот четырёхугольник является параллелограммом».

Дано:  $ABCD$  – четырёхугольник,  $AB = CD$ ,  $BC = AD$ .

Доказать:  $ABCD$  – параллелограмм (рис.1).

Доказательство.

Синтетический метод

1. Рассмотрим  $\triangle ABC$  и  $\triangle ACD$ . В этих треугольниках сторона  $AC$  — общая,  $AB = CD$ ,  $AD = BC$ . По третьему признаку равенства треугольников имеем  $\triangle ABC = \triangle ACD$ .

2. Так как  $\triangle ABC = \triangle ACD$ , то в этих треугольниках против равных сторон лежат равные углы; из равенства  $AB = CD$  следует, что  $\angle 1 = \angle 2$ ; из равенства  $BC = AD$  следует, что  $\angle 3 = \angle 4$ .

3.  $\angle 3$  и  $\angle 4$  — накрест лежащие углы при прямых  $AB$ ,  $CD$  и секущей  $AC$ , и они равны, а значит, прямые  $AB$  и  $CD$  параллельны.

4.  $\angle 1$  и  $\angle 2$  — накрест лежащие углы при прямых  $BC$ ,  $AD$  и секущей  $AC$ , и они равны, а значит,  $BC$  и  $AD$  параллельны.

5. Имеем четырёхугольник  $ABCD$ , у которого противоположные стороны попарно параллельны, и по определению делаем вывод, что четырёхугольник  $ABCD$  — параллелограмм.

## Аналитический метод

1. Нам нужно доказать, что четырехугольник  $ABCD$  является параллелограммом, т. е. мы должны показать, что он при заданных условиях удовлетворяет всем требованиям определения параллелограмма:  $AB \parallel CD$  и  $BC \parallel AD$ .

2. Чтобы доказать параллельность прямых  $AB$  и  $CD$ ,  $AD$  и  $BC$ , достаточно доказать равенство накрест лежащих углов 3 и 4 при прямых  $AB$ ,  $CD$  и секущей  $AC$  и равенство углов 1 и 2 при прямых  $AD$ ,  $BC$  и секущей  $AC$ .

3. Чтобы доказать равенство углов 3 и 4, 1 и 2, достаточно доказать равенство треугольников, содержащих эти углы, т. е. надо доказать, что  $\triangle ABC = \triangle ADC$ .

4. Чтобы доказать равенство треугольников  $ABC$  и  $ADC$ , достаточно показать, что они удовлетворяют условиям одного из признаков равенства треугольников.

Аналитический метод позволил нам найти путь доказательства. Теперь следует проделать обратный путь (4—3—2—1), и теорема будет доказана.

К частным относят метод геометрических преобразований, векторный метод, координатный метод, алгебраический метод и т. д.

Рассмотрим задачу, которую можно решить векторным методом.

Задача. Доказать, что отрезок, соединяющий середины диагоналей трапеции, параллелен ее основаниям.

Решение.

Пусть  $M$  и  $N$  – середины диагоналей трапеции  $ABCD$  (рис. 2). Покажем, что  $MN \parallel AD$ . Для этого достаточно показать, что  $\overrightarrow{MN}$  коллинеарен  $\overrightarrow{AD}$

Так как  $M$  и  $N$  – середины отрезков  $AC$  и  $BD$ , то

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AM} &= \frac{1}{2} \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2} (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}), \\ \overrightarrow{AN} &= \frac{1}{2} (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}).\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) - \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{BC}).$$

Но  $\overrightarrow{BC}$  коллинеарен вектору  $\overrightarrow{AD}$ , поэтому  $\lambda \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ . Тогда

$$\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} - \lambda \overrightarrow{AD}) = \frac{1}{2}(1 - \lambda) \overrightarrow{AD} = k \overrightarrow{AD},$$

то есть  $\overrightarrow{MN}$  коллинеарен  $\overrightarrow{AD}$ , что и требовалось доказать.

Проведение любого доказательства опирается на три блока знаний и умений: содержательный, структурный, логический.

В содержательный блок входят элементы, связанные с ранее изученными математическими понятиями и фактами, которые использованы или в формулировке утверждения, или в качестве аргументов при проведении рассуждений. Эти элементы существенно зависят от логической структуры курса, от его аксиоматики, от методических особенностей изложения и т.д., а поэтому для одной и той же теоремы в различных учебниках содержательный блок может оказаться различным.

В структурный блок входят знания и умения, связанные со структурой утверждения и возможности её преобразования. В этот блок входят умение выделять условие и заключение теоремы, умение преобразовывать логическую форму теоремы с целью получения более простых подтеорем и т.д.

Логический блок содержит знания и умения, связанные с правилами логических рассуждений.

Под доказательными рассуждениями понимаются такие, в которых основаниями перехода от одних суждений к другим являются теоретические предложения (аксиомы, теоремы, определения некоторой математической теории) [15].

В [15] выделяется четыре уровня проведения доказательных рассуждений:

- простое воспроизведение (предъявленная задача распознаётся субъектом как ранее решённая, и рассуждение представляет воспроизведение известного);

- обобщённое воспроизведение (рассуждение проводится на основе выделения общего в условии и требовании предъявленной задачи и ранее решённой или на основе распознавания задачи как принадлежащей к типу задач с известной схемой рассуждения);
- логический поиск (решение задачи отыскивается на основе выполнения действий вывода следствий и отыскания достаточных условий);
- логико-эвристический уровень (выполнение действий вывода следствий или отыскания достаточных условий связано с применением различного рода эвристик)

Приведём примеры заданий согласно выделенным уровням.

1. Докажите, что если две стороны и угол между ними одного треугольника соответственно равны двум сторонам и углу между ними другого треугольника, то такие треугольники равны.

После изучения признаков равенства треугольников для воспроизведения изученного материала можно предъявить данную задачу учащимся.

2. В прямоугольнике  $ABCD$  точка  $O$  – точка пересечения диагоналей  $AC$  и  $BD$ . Докажите, что  $\triangle ABO$  и  $\triangle CDO$  равны.

После изучения третьего признака равенства треугольников можно предъявить данную задачу для решения по примеру, представленному в учебнике.

3. На рисунке 3  $AO = OB$  и  $DO = OC$ . Докажите равенство отрезков  $AD$  и  $BC$ .

После изучения второго признака равенства треугольников можно предъявить данную задачу для проведения логических рассуждений о вертикальных углах.

4. Точки  $A, B, C$  принадлежат одной прямой. Точки  $D_1$  и  $D_2$  лежат по разные стороны от этой прямой. Докажите, что если треугольники  $ABD_1$  и  $ABD_2$  равны, то треугольники  $BCD_1$  и  $BCD_2$  тоже равны.

После изучения признаков равенства треугольников можно предъявить данную задачу для отыскания достаточных условий равенства треугольников  $BCD_1$  и  $BCD_2$ .

Таким образом, организация процесса обучения решению задач на доказательство в соответствии с указанными уровнями будет способствовать формированию у обучающихся действий, составляющих основу деятельности проведения доказательных рассуждений, что приведет к овладению навыками решения задач на доказательство. В свою очередь выполнение каждого уровня представляет собой реализацию этапов, представленных выше.

### **1.3. Формирование познавательных универсальных учебных действий в процессе решения задач на доказательство**

Рассмотрим более подробно этапы решения задач на доказательство, выделенные в пункте 1.2, определим содержание деятельности обучаемых на каждом, выделенном этапе и выявим возможности для формирования ПУУД.

#### **I. Осмысление условия задачи:**

- 1) Выделение объектов, данных в условии, и их свойств, актуальных для данной задачи;
- 2) Выделение объектов из требования задачи;
- 3) Краткая запись условия и требования задачи;
- 4) Построение чертежа.
- 5) Выделение и обозначение на чертеже данных элементов;
- 6) Установление связей между объектами из условия и заключения задачи, их свойствами.

#### **II. Составление плана решения:**

- 1) работа с чертежом: отыскание фигур, в которые входят элементы из условия и требования, установление соотношений между ними;
- 2) выполнение дополнительных построений (при необходимости);
- 3) выбор используемой для решения теории (определений, теорем, аксиом);
- 4) работа с определениями понятий, свойствами геометрических фигур;
- 5) поиск связей между утверждениями условия и утверждением заключения путём нисходящего, восходящего или комбинированного анализа либо предположение противного к условию;
- 6) выбор из найденных вариантов решения наиболее эффективного, составление общего плана решения задачи.

III. Осуществление плана - пошаговая запись умозаключений с обоснованиями, приводящих от условия к заключению.

IV. Изучение найденного решения:

- 1) изучение решения с целью контроля логики и последовательности, обоснованности приведённых умозаключений;
- 2) поиск других способов решения;
- 3) выяснение вопроса о том, при каких условиях справедливо доказанное утверждение.

Соотнесём содержание деятельности на каждом этапе решения задач на доказательство с формируемыми в процессе их выполнения компонентами ПУУД, что позволит сделать вывод о целесообразности применения процесса решения задач на доказательство для формирования ПУУД (Таблица 1).

Таблица 1

Формируемые в процессе осуществления этапов решения задач на  
доказательство компоненты ПУУД

Этапы решения задач на доказа- тельство	Содержание деятельности обучаемых	Познавательные УУД
Осмысле ние условия задачи	<p>1) Выделение объектов, данных в условии, и их свойств, актуальных для данной задачи;</p> <p>2) Выделение объектов из требования задачи;</p> <p>3) Краткая запись условия и требования задачи;</p> <p>4) Построение чертежа.</p> <p>5) Выделение и обозначение на чертеже данных элементов;</p> <p>6) Установление связей между объектами из условия и заключения задачи, их свойствами</p>	<p>Поиск и выделение необходимой информации, в том числе с помощью компьютерных средств, обработка, хранение, защита и использование информации; умение представлять информацию в виде таблиц, графиков, схем, диаграмм; умение представлять информацию при помощи своей системы обозначений; умение получить информацию из представленного графика, диаграммы, схемы; умение устанавливать связи между объектами и их частями; умение разделять объект на части</p>





Формируемые в процессе осуществления этапов решения задач на  
доказательство компоненты ПУУД

Этапы решения задач на доказательство	Содержание деятельности обучаемых	Познавательные УУД
Составление плана решения	<p>1) работа с чертежом: отыскание фигур, в которые входят элементы из условия и требования, установление соотношений между ними;</p> <p>2) выполнение дополнительных построений (при необходимости);</p> <p>3) выбор используемой для решения теории (определений, теорем, аксиом);</p> <p>4) работа с определениями понятий, свойствами геометрических фигур;</p> <p>5) поиск связей между утверждениями условия и утверждением заключения путём нисходящего, восходящего или комбинированного анализа либо предположение противного к условию;</p> <p>6) выбор из найденных вариантов решения наиболее эффективного, составление общего плана решения задачи</p>	<p>Умение достраивать недостающие элементы совокупности;</p> <p>установление причинно-следственных связей, построение логической цепи рассуждений;</p> <p>выдвижение гипотез; анализ объектов; синтез; построение логической цепочки рассуждений; доказательство; выбор наиболее эффективных способов решения задач в зависимости от конкретных условий</p>

Формируемые в процессе осуществления этапов решения задач на  
доказательство компоненты ПУУД

Этапы решения задач на доказательство	Содержание деятельности обучаемых	Познавательные УУД
Осуществление плана	Пошаговая запись умозаключений с обоснованиями, приводящих от условия к заключению	Выдвижение гипотез и их обоснование; доказательство; построение логической цепочки рассуждений; умение кодирования и декодирования информации; структурирование знаний
Изучение найденного решения	1) изучение решения с целью контроля логики и последовательности, обоснованности приведённых умозаключений; 2) поиск других способов решения; 3) выяснение вопроса о том, при каких условиях справедливо доказанное утверждение	Рефлексия способов и условий действия, контроль и оценка процесса и результатов деятельности; анализ объектов; формулирование проблемы; выдвижение гипотез и их обоснование

Таким образом, можно сделать вывод, что формирование познавательных универсальных учебных действий возможно при работе с задачами на доказательство. Проведем соотнесение (рис.3) выделенных

этапов решения задач различных классов и элементов структуры ПУУД, представленных в параграфе 1.1.

Проведённое соотнесение этапов решения задач на доказательство и компонентов ПУУД (рис. 3) позволяет сделать вывод о том, что познавательные учебные действия могут быть сформированы при решении задач на доказательство.

*На основании представленных материалов можно сделать вывод о том, что на каждом этапе решения задач на доказательство: осмысление условия задачи, составление плана решения, осуществление плана, изучение найденного решения, осуществляется формирование компонентов ПУУД. При этом должны быть учтены связи между выделенными этапами и познавательными действиями, представленные на рисунке 3.*

## **ВЫВОДЫ ПО ГЛАВЕ 1**

В первой главе в ходе анализа литературы по теме исследования были выявлены различные подходы к определению понятия «познавательные универсальные учебные действия». Анализ этих подходов позволил выделить основные признаки данного понятия, на основании которых познавательные универсальные учебные действия были определены как действия, обеспечивающие познание, включающее в себя поиск необходимой информации, работу с полученной информацией, обработку информации и ее использование, как в рамках образовательного процесса, так и в жизненных ситуациях с целью прогнозирования своей познавательной деятельности. В ходе исследования были рассмотрены различные подходы к классификации познавательных универсальных учебных действий. Анализ данных подходов, позволил установить, что все рассматриваемые классификации имеют сходную структуру и основываются на классификации А.Г. Асмолова, принятой за основную в данной работе, в

которой блок познавательных универсальных учебных действий содержит общеучебные действия, включая знаково-символические; логические действия, а также действия постановки и решения проблем. В процессе рассмотрения компонентов познавательных универсальных учебных действий, был конкретизирован их пооперационный состав, т.е. выделены простые операции, входящие в состав рассматриваемых действий. Показано, что выделенный пооперационный состав познавательных универсальных учебных действий дает возможность устанавливать соответствие между ними и деятельностью обучающихся, которая направлена на их формирование. Отмечено, что процесс решения задачи на доказательство включает в себя четыре этапа, каждый из которых включает в себя конкретные операции. Организация обучения поэтапному решению задач на доказательство, в соответствии с этими этапами дает возможность осуществлять эффективное обучение доказательству математических утверждений, т.е. формировать у обучающихся умения, составляющие основу деятельности по доказательству утверждений. Анализ содержания каждого этапа решения задач на доказательство позволил определить те познавательные универсальные учебные действия обучающихся, которые формируются на данных этапах, что в свою очередь позволило составить схему соотношения этапов решения задач на доказательство с формируемыми ПУУД, представленное на рисунке 3. Данное сопоставление демонстрирует возможность формирования познавательных УУД при решении задач на доказательство и обосновывает целесообразность использования задач на доказательство в процессе обучения с целью формирования рассматриваемого вида универсальных учебных действий.

## **ГЛАВА 2. МЕТОДИКА КОНСТРУИРОВАНИЯ ЗАДАНИЙ ДЛЯ ФОРМИРОВАНИЯ ПОЗНАВАТЕЛЬНЫХ УНИВЕРСАЛЬНЫХ УЧЕБНЫХ ДЕЙСТВИЙ У ОБУЧАЮЩИХСЯ В ПРОЦЕССЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ НА ДОКАЗАТЕЛЬСТВО**

### **2.1. Конструкции для формулирования направленных на формирование познавательных универсальных учебных действий заданий к элементам этапов задач на доказательство**

В главе 1 теоретически обосновано формирование познавательных универсальных учебных действий у обучающихся при осуществлении этапов решения задач на доказательство.

Формирование познавательных универсальных учебных действий может быть реализовано в процессе выполнения специальных заданий на каждом этапе решения задач на доказательство.

Согласно рисунку 3 в процессе решения задач на доказательство следующие компоненты ПУУД формируются сразу на нескольких этапах:

- поиск и выделение необходимой информации;
- смысловое чтение, работа с текстом;
- знаково-символические действия;
- анализ объектов;
- выдвижение гипотез и их обоснование.

На основе анализа литературы [15, 17, 20, 37] можно выделить следующие конструкции для формулирования заданий по выделенным ПУУД на соответствующих этапах решения задач на доказательство, представленные в таблице 2.

Таблица 2

Конструкции для формулирования заданий, направленных на формирование познавательных УУД на этапах решения задач на доказательство

№ п/п	Элемент этапа	Формируемое познавательное УУД	Конструкции для формулирования заданий
1	Выделение объектов, данных в условии, и их свойств, актуальных для данной задачи	Поиск и выделение необходимой информации	Назовите тот факт, о котором говорится в условии. Назовите фигуры ....
		Смысловое чтение, работа с текстом	Подчеркните в тексте то, что известно о .... Замените понятие ... определением.
		Анализ объектов	Сформулируйте свойство для ....
2	Выделение объектов из требования задачи	Смысловое чтение, работа с текстом	Отделите .... Выделите требования задачи. На рисунке выделите ....
3	Построение чертежа	Смысловое чтение, работа с текстом	Изобразите фигуру, о которой говорится в ....
		Знаково-символические действия	Выделите на рисунке другим цветом ....

Конструкции для формулирования заданий, направленных на формирование познавательных УУД на этапах решения задач на доказательство

№ п/п	Элемент этапа	Формируемое познавательное УУД	Конструкции для формулирования заданий
4	Выделение и обозначение на чертеже данных элементов	Поиск и выделение необходимой информации	Обозначьте на рисунке .... В тексте задачи выделите ....
		Знаково- символические действия	Изобразите на рисунке .... Выделите на рисунке ....
5	Установление связей между объектами из условия и заключения задачи, их свойствами	Выдвижение гипотез и их обоснование	На основании чего можно доказать .... На основе условия и требования задачи сделайте предположение о ....
6	Работа с чертежом: отыскание фигур, в которые входят элементы из условия и требования, установление соотношений между ними	Знаково- символические действия	Выделите те фигуры, которым принадлежат .... Из отношения каких фигур можно выяснить отношение ....



Продолжение таблицы 2

Конструкции для формулирования заданий, направленных на формирование познавательных УУД на этапах решения задач на доказательство

№ п/п	Элемент этапа	Формируемое познавательное УУД	Конструкции для формулирования заданий
7	Выполнение дополнительных построений (при необходимости)	Знаково-символические действия	Исходя из предположения о методе доказательства и условия задачи, постройте ....
8	Выбор используемой для решения теории (определений, теорем, аксиом)	Поиск и выделение необходимой информации	На основе условия и требования задачи выберите теорию для решения, ответ обоснуйте. Выделите знания и умения, необходимые для осуществления доказательства. Сформулируйте определение, теорему, аксиому...
		Выдвижение гипотез и их обоснование	
9	Работа с определениями понятий, свойствами	Поиск и выделение необходимой информации	Преобразуйте определение, понятие, свойство в.... Изобразите на схеме свойство...

Конструкции для формулирования заданий, направленных на формирование познавательных УУД на этапах решения задач на доказательство

№ п/п	Элемент этапа	Формируемое познавательное УУД	Конструкции для формулирования заданий
10	Поиск связей между утверждениями условия и утверждением заключения путём нисходящего, восходящего или комбинированного анализа либо предположение противного к условию	Анализ объектов	Сделайте вывод из .... Дополните решение необходимыми обоснованиями приведённых умозаключений ... Восстановите пропущенные шаги в доказательстве ...
11	Поиск других способов решения	Анализ объектов	В найденном доказательстве замените ....

*С помощью формулирования специальных заданий на выбранных этапах решения задач на доказательство возможно формирование познавательных универсальных учебных действий на основе выделенных конструкций (табл. 7).*

## **2.2. Примеры заданий для формирования познавательных универсальных учебных действий у обучающихся на различных этапах решения задач на доказательство**

В параграфе 2.1 выделены конструкции для формулирования заданий, направленных на формирование у обучающихся познавательных универсальных учебных действий на выделенных этапах решения задач на доказательство. Примеры таких заданий представлены в таблице 3.

Таблица 3

Примеры заданий, направленных на формирование познавательных  
УУД на этапах решения задач на доказательство

№ п/п	Формулировка задачи	Этап решения	Формируемое познавательное действие	Пример задания
1	Доказать, что разносторонний треугольник нельзя разрезать на два равных треугольника.	Поиск связей между утверждениями условия и утверждением заключения путём нисходящего, восходящего или комбинированного анализа либо предположение противного к условию	Анализ объектов	Какой вывод можно сделать из того, что треугольники равны?
2	В четырехугольнике ABCD углы A и B равны, а $\angle D > \angle C$ . Докажите, что тогда $AD < BC$ .	Выделение объектов, данных в условии, и их свойств, актуальных для данной задачи	Поиск и выделение необходимой информации	Подчеркните то, что известно о четырехугольнике ABCD



Примеры заданий, направленных на формирование познавательных  
УУД на этапах решения задач на доказательство

№ п/п	Формулировка задачи	Этап решения	Формируемое познавательное действие	Пример задания
3	На продолжении наибольшей стороны $AC$ треугольника $ABC$ отложен отрезок $ CD = BC $ . Доказать, что $\angle ABD$ тупой.	Построение чертежа	Знаково-символическое действие	Изобразите фигуру, о которой говорится в условии
4	В выпуклом пятиугольнике $ABCDE$ углы при вершинах $B$ и $D$ – прямые, $\angle BCA = \angle DCE$ , а точка $M$ – середина стороны $AE$ . Доказать, что $MB = MD$ .	Установление связей между объектами из условия и заключения задачи, их свойствами	Выдвижение гипотез и их обоснование	На основании чего можно доказать, что отрезки $MB$ и $MD$ равны.

Примеры заданий, направленных на формирование познавательных  
УУД на этапах решения задач на доказательство

№ п/п	Формулировка задачи	Этап решения	Формируемое познавательное действие	Пример задания
5	Доказать, что существует бесконечно много натуральных чисел, не представимых в виде $p + n^{2k}$ ни при каких простых $p$ и целых $n$ и $k$ .	Выбор используемой для решения теории (определений, теорем, аксиом)	Поиск и выделение необходимой информации	Выделите знания и умения, необходимые для осуществления доказательства.
6	Пусть $AB$ — основание трапеции $ABCD$ . Доказать, что если $AC + BC = AD + BD$ , то трапеция $ABCD$ — равнобокая.	Выбор используемой для решения теории (определений, теорем, аксиом)	Поиск и выделение необходимой информации	Сформулируйте определение равнобокой трапеции

Примеры заданий, направленных на формирование познавательных  
УУД на этапах решения задач на доказательство

№ п/п	Формулировка задачи	Этап решения	Формируемое познавательное действие	Пример задания
7	В четырёхугольнике $ABCD$ опущены перпендикуляры $AM$ и $CP$ на диагональ $BD$ , а также $BN$ и $DQ$ на диагональ $AC$ . Доказать, что четырёхугольники $ABCD$ и $MNPQ$ подобны.	Выделение и обозначение на чертеже данных	Знаково-символическое действие	Выделите на рисунке четырёхугольники, о которых говорится в требовании задачи

Примеры заданий, направленных на формирование познавательных  
УУД на этапах решения задач на доказательство

№ п/п	Формулировка задачи	Этап решения	Формируемое познавательное действие	Пример задания
8	Докажите, что сумма расстояний от любой точки правильного многоугольника до его сторон не зависит от выбранной точки.	Выделение и обозначение на чертеже данных элементов	Поиск и выделение необходимой информации	В тексте задачи выделите условие
9	Докажите, что середины сторон произвольного четырехугольника являются вершинами параллелограмма.	Выбор используемой для решения теории (определений, теорем, аксиом)	Поиск и выделение необходимой информации	Выделите знания и умения, необходимые для осуществления доказательства.



Примеры заданий, направленных на формирование познавательных  
УУД на этапах решения задач на доказательство

№ п/п	Формулировка задачи	Этап решения	Формируемое познавательное действие	Пример задания
10	Докажите, что середины сторон ромба являются вершинами прямоугольника	Построение чертежа	Знаково-символическое действие	Изобразите фигуру, о которой говорится в требовании задачи
11	Докажите, что высоты, проведенные к боковым сторонам равнобедренного треугольника, равны.	Установление связей между объектами из условия и заключения задачи, их свойствами	Выдвижение гипотез и их обоснование	На основании чего можно доказать равенство отрезков

Примеры заданий, направленных на формирование познавательных  
УУД на этапах решения задач на доказательство

№ п/п	Формулировка задачи	Этап решения	Формируемое познавательное действие	Пример задания
12	Докажите, что две равные наклонные, проведенные из данной точки к данной прямой, имеют равные проекции.	Выбор используемой для решения теории (определений, теорем, аксиом)	Поиск и выделение необходимой информации	Сформулировать определение проекции
13	Докажите, что биссектриса треугольника лежит между его медианой и высотой, проведенных из той же вершины.	Выбор используемой для решения теории (определений, теорем, аксиом)	Поиск и выделение необходимой информации	Сформулируйте определение биссектрисы, медианы и высоты треугольника

Примеры заданий, направленных на формирование познавательных  
УУД на этапах решения задач на доказательство

№ п/п	Формулировка задачи	Этап решения	Формируемое познавательное действие	Пример задания
14	В треугольнике $ABC$ проведены высоты $AA_1$ и $BB_1$ . Докажите, что треугольник $A_1B_1C$ подобен треугольнику $ABC$ .	Выделение и обозначение на чертеже данных элементов	Знаково-символические действия	Выделите на рисунке другим цветом треугольники, о которых говорится в требовании задачи

Приведённые примеры заданий иллюстрируют реализацию возможности формирования у обучающихся познавательных действий на разных этапах решения задач на доказательство.

## ВЫВОДЫ ПО ГЛАВЕ 2

Во второй главе были выделены конструкции для формулирования заданий на формирование ПУУД на следующих этапах решения задач на доказательство:

- выделение объектов, данных в условии, и их свойств, актуальных для данной задачи;

- выделение объектов из требования задачи;
- выделение и обозначение на чертеже данных;
- построение чертежа;
- выделение и обозначение на чертеже данных элементов;
- установление связей между объектами из условия и заключения задачи, их свойствами;
- работа с чертежом: отыскание фигур, в которые входят элементы из условия и требования, установление соотношений между ними;
- выполнение дополнительных построений (при необходимости);
- выбор используемой для решения теории (определений, теорем, аксиом);
- работа с определениями понятий, свойствами;
- поиск связей между утверждениями условия и утверждением заключения путём нисходящего, восходящего или комбинированного анализа либо предположение противного к условию;
- поиск других способов решения.

На основе выделенных конструкций были представлены задания по формированию ПУУД для конкретных задач на доказательство (табл. 3).

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Цель данного исследования заключалась в разработке конструкций для формулирования заданий, направленных на формирование познавательных универсальных учебных действий в процессе решения задач на доказательство. Для достижения поставленной цели был решён ряд задач.

В ходе решения первой задачи были проанализированы работы таких авторов, как А.Г. Асмолов, Т. Ю. Серeda, Н.А. Чуланова и Т.Н. Черняева, А. В. Онучина для выделения сущности понятия познавательных универсальных учебных действий, их компонентов и функций. На основе обобщения представленных определений ПУУД можно определить как действия, обеспечивающие познание, включающее в себя поиск необходимой информации, работу с полученной информацией, обработку информации и ее использование, как в рамках образовательного процесса, так и в жизненных ситуациях с целью прогнозирования своей познавательной деятельности. Согласно структуре, выделенной А.Г. Асмоловым и взятой за основу в данной работе, блок познавательных универсальных учебных действий содержит общеучебные действия, включая знаково-символические; логические действия, а также действия постановки и решения проблем.

Для решения второй задачи были изучены работы В.А. Далингера, Г.И. Саранцева, Д. Пойа, Ю.А. Розка, З.П. Чиркиной, на основе которых было представлено определение понятие задачи на доказательство, её цели и этапы её решения, показана структура и методы доказательства, выделены уровни проведения доказательных рассуждений.

Для решения третьей задачи на основе соотнесения выделенных этапов решения задач на доказательство и элементов структуры познавательных УУД была показана возможность формирования познавательных умений при

работе на различных этапах решения задач на доказательство. Результатом решения данной задачи является соответствие, представленное на рисунке 3.

В ходе решения четвёртой задачи в ходе анализа литературы были выделены конструкции для формулирования заданий, направленных на формирование познавательных универсальных учебных действий при осуществлении элементов этапов решения задач на доказательство.

Для решения пятой задачи на основе выделенных конструкций были представлены конкретные задания для формирования познавательных универсальных учебных действий на определённых этапах решения задач на доказательство.

На основании полученных результатов можно сделать вывод, что задачи на доказательство являются эффективным средством для формирования познавательных универсальных учебных действий.

Таким образом, все поставленные в работе задачи были выполнены, а значит, цель работы была достигнута.